ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дударева О.В., к.ф.-м.н., доцент
Сабиров Р.Р., магистрант
Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются особенности применения различных численных методов при решении дифференциальных уравнений в частных производных и систем дифференциальных уравнений в частных производных. В статье изложены алгоритмы рассматриваемых методов и проанализирована их область применения. Также рассмотрены простейшие примеры для каждого из рассматриваемых численных методов и выявлены особенности их применения.

Ключевые слова: конечные разности, метод конечных элементов, метод конечных объемов, дифференциальные уравнения в частных производных, численные методы.

Введение. Многие задачи в механике сплошных сред, гидродинамике, аэродинамике и других областях науки приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных или к системам дифференциальных уравнений в частных производных. Но аналитическое (точное) решение таких уравнений возможно только лишь для ограниченного числа случаев. В других случаях применяются численные методы, позволяющие получить приближенное решение с заданной точностью.

Применение численных методов при решении дифференциальных уравнений и систем уравнений в частных производных. Процесс решения дифференциальных уравнений в частных производных обладает наибольшими сложностями, по сравнению с решением обыкновенных дифференциальных

уравнений. Это объясняется тем, что в обыкновенных дифференциальных уравнениях у нас одна независимая переменная – t. При решении таких уравнений метод просто перемещается по времени. В то время как в дифференциальных уравнениях в частных производных независимых переменных несколько: время t и координаты x, y. Также есть неизвестная функция $u(x,t)$, которая находится в области. Поэтому идея численных методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных – аппроксимировать не время, а само пространство[3,4].

Перед выбором метода необходимо определить тип задачи. Это необходимо потому, как у разных типов уравнений разная физика и устойчивость. Существует три типа уравнений:

- Эллиптические (уравнение Лапласа, Пуассона);
- Параболические (уравнение теплопроводности);
- Гиперболические (волновое уравнение)[5].

Метод конечных разностей. Является одним из первых численных методов, разработанных для решения дифференциальных уравнений. Его основная идея заключается в замене производных разностными отношениями, что позволяет аппроксимировать уравнения в дискретной форме. Данный метод довольно прост в реализации и хорошо работает при использовании в нем простых геометрий. Однако, в случае, если границы имеют сложную, криволинейную геометрию, метод будет неэффективен. Для достижения высокой точности требуется построение мелкой сетки разностных отношений [1,2].

Рассмотрим пример. Пусть есть функция $u(x,t)$ – температура стержня в момент времени t в точке x. Вместо поиска по всей области мы строим сетку: по оси x шаг t, по оси t шаг τ. Получаем узлы (x_i, t_n), где $x_i = ih, t_n = n\tau$. В каждом узле находим значение $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Нам необходимо заменить первую (по времени) и вторую (по пространству) производные на разностные отношения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{i,n} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

Подставим полученные разностные отношения в исходное уравнение и выразим значение функции на слое $n+1$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Однако, в данном случае важно выполнение условия$\frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$для того, чтобы полученная разностная схема была устойчивой.

Метод конечных объемов. Данный метод заключается в разбивании области на «ячейки», которые затем интегрируются с сохранением законов сохранения. Сильной стороной данного метода является сохранение законов на дискретном уровне. То есть такой метод хорош при работе с разрывными течениями. Слабой же стороной является то, что он требует сложной обработки данных, полученных при вычислении для достижения высокой точности[1,2].

Рассмотрим пример. Для сравнения возьмем то же самое уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(0,t) = g_1(t), \qquad u(L,t) = g_2(t).$$

Но теперь вместо построения сетки и замены производных разностными отношениями, мы разбиваем область на ячейки и интегрируем уравнение. Отрезок $[0, L]$ делим на N ячеек шириной $h = \frac{L}{N}$. Центры ячеек – точки $x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h$, а u_i^n – средние по ячейке.

$$u_i^n \approx \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n)dx$$

Проинтегрируем по ячейке $V_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ и по времени от t_n до t_{n+1}:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx} dx dt$$

В левой части получим изменение средней температуры в ячейке. В правой части формула Ньютона-Лейбница по x превращает u_{xx} в разность потоков тепла на гранях. Объединяя полученное мы получим закон сохранения в ячейке:

$$h\left(u_i^{n+1} - u_i^n\right) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right) dt$$

Здесь $F = a u_x$ – тепловой поток. Далее производную u_x на каждой грани заменяем разностью значений в центрах соседних ячеек:

$$F_{i+1/2} \approx a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \qquad F_{i-1/2} \approx a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}$$

Интеграл по времени берем в момент времени t_n. Подставляем потоки в закон сохранения:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Получилась та же самая формула, что и в методе конечных разностей. Условие устойчивости метода тоже будет совпадать с условием в методе конечных разностей. Граничные условия в данном численном методе тоже выражаются через закон сохранения тепловой энергии.

Метод конечных элементов. Метод представляет собой мощный инструмент для численного решения дифференциальных уравнений, особенно в задачах с нерегулярной геометрией. Суть метода заключается в разбиении области на элементы, внутри которых решение аппроксимируется с использованием базисных функций (например, линейных или квадратичных). Этот подход находит широкое применение в инженерии, включая моделирование сложных конструкций. Данный метод довольно гибок для сложных геометрий, но требует высоких вычислительных способностей[2].

Рассмотрим пример. Для сравнения используем то же уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(0,t) = g_1(t), \qquad u(L,t) = g_2(t).$$

Первым делом превратим уравнение в интегральное тождество. Умножим его на произвольную тестовую функцию vи проинтегрируем по области $[0, L]$:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx = a \int_0^L u_{xx} v dx$$

Справа нам необходимо проинтегрировать интеграл по частям и подставить в исходную формулу. Получаем слабую форму: найти $u(x,t)$, такое что для любой функции $v(x)$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a \int_0^L u_x v_x dx = a[u_x v]_0^L$$

После интегрирования по частям требуемая гладкость решения снижается, а граничные условия встраиваются в формулировку через слагаемое, полученное в ходе интегрирования по частям.

Далее разбиваем $[0, L]$ на N элементов. Применяются узлы $x_i = ih$, $h = \frac{L}{N}$. В методе конечных элементов решение представляется через базисные функции:

$$u_h(x,t) \approx \sum_{i=0}^{N} U_i(t)\, \phi_i(x)$$

$\phi_i(x) = 1$ в узле x_i, ноль во всех соседних узлах и линейно убывает между ними.Коэффициенты $U_i(t)$ – это значения решения в узлах, а между узлами решение линейно интерполируется.

Подставляем $u_h = \sum U_j(t)\, \phi_j(x)$ в слабую форму и берем $v = \phi_i$ (когда тестовые и базисные функции совпадают – это метод Галёркина). Получаем для каждого i:

$$\sum_j \left(\int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) \frac{dU_j}{dt} + a \sum_j \left(\int_0^L \phi_i' \phi_j' dx \right) U_j = a[u_x \phi_i]_0^L$$

У нас получилась система ОДУ по времени: $M\dot{U} + KU = f$, где $M_{ij} = \int_0^L \phi_i \phi_j dx$ – матрица масс, $K_{ij} = \int_0^L \phi_i' \phi_j' dx$ – матрица жесткости, f – вектор, собирающий вклады правой части и граничных условий.

Поскольку $\phi_i \neq 0$ только на двух элементах, интегралы сводятся к сумме вкладов элементов. На одном элементе длины h базис – две линейные функции, и их производные постоянны. Прямое вычисление дает элементные матрицы (матрица масс одного элемента и матрица жесткости одного элемента):

$$M^{(e)} = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad K^{(e)} = \frac{a}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементные матрицы для всех элементов суммируются в глобальные с учетом общих узлов (такая процедура называется сборкой). Внутренние узлы и система для них примут вид:

$$M\colon \frac{h}{6}(U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1}), \qquad K\colon \frac{a}{h}(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1})$$

$$\frac{h}{6}(U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1}) = \frac{a}{h}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})$$

Аппроксимируем $\dot{U}_i \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau}$, используя известные значения на слое n. Но если мы оставим массовую матрицу как есть, то явного выражения не получится. Воизбежание этого запишем систему на шаге по времени и преобразуем ее так, чтобы в левой части осталось только неизвестное значение на новом слое:

$$M\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = -KU^n + f^n \implies U^{n+1} = U^n + \tau M^{-1}(-KU^n + f^n)$$

На практике M^{-1} явно не вычисляют, используя сосредоточенную матрицу масс – замена M диагональной матрицей с суммой элементов строк. Для нас это будет значить, что $\frac{h}{6}(U_{i-1} + 4U_i + U_{i+1})$ эквивалентно hU_i. После замены явная схема примет вид:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Получилась та же формула, что и в первых двух методах и с тем же условием устойчивости. Однако шли к этому решению мы дольше и более сложными вычислениями, чем в предыдущих двух численных методах.

Заключение. В заключение отметим, что каждый исследованный нами численный метод хорош для применения в определенной области, так как каждый из них имеет определенные плюсы и минусы. Например, метод конечных разностей довольно прост в реализации и понимании, но плохо справляется с сложной геометрией и разрывными коэффициентами. В то время как метод конечных элементов хорошо справляется с минусами метода конечных разностей, но сложен в понимании и реализации.

Литература

1. Колган, В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики / В. П. Колган // Ученые записки ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68–77. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-printsipa-minimalnyh-znacheniy-proizvodnoy-k-postroeniyu-konechnoraznostnyh-shem-dlya-rascheta-razryvnyh-resheniy-gazovoy (дата обращения: 26.10.2026).
2. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. — Москва : Мир, 1972. — 418 с. — URL: https://djvu.online/file/lMafBYtQG42vU?ysclid=mw38dod8fp3490286 (дата обращения: 27.10.2026).
3. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1971. — 552 с. — URL: https://djvu.online/file/COPZEBiHUqEvc (дата обращения: 22.10.2026).
4. Самарский, А. А. Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. — Москва : Наука, 1982. — 239 с. — URL: https://djvu.online/file/Kzlr707v8FaF2 (дата обращения: 22.10.2026).

5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1977. — 735 с. — URL: https://djvu.online/file/pFkSAmhejIbzU (дата обращения: 24.10.2026).